2012-06-15

プランクの輻射公式：

$$E(\omega)d\omega = 2 \cdot \underbrace{\frac{\hbar\omega\, e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}}_{}\, D(\omega)\, d\omega$$

偏光

（ωを持つ調和振動子1個のエネルギー）

$$D(\omega) = \frac{V}{c^3(2\pi)^3}4\pi\omega^2$$

モードの数.

温度 Tでの電磁場のエネルギー—

$$\int_0^\infty E(\omega)d\omega = \int_0^\infty 2\,\frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\frac{V}{c^3(2\pi)^3}4\pi\omega^2 d\omega$$

$$= \frac{\hbar 8\pi V}{c^3(2\pi)^3}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}dx}_{\frac{\pi^4}{15}}\frac{1}{(\beta\hbar)^4} = \frac{\pi^2}{15}\frac{V}{\hbar c^3}(k_B T)^4 \propto T^4$$

$\beta\hbar\omega = x$

$$\omega^3 d\omega = \frac{1}{(\beta\hbar)^4}x^3dx$$

Stefan-Boltzmann の公式

Rayleigh-Jeans : $\hbar \to 0$

$$\int_0^\infty 2\hbar\omega\frac{V}{(2\pi)^3c^3}4\pi\omega^2d\omega = \hbar 2\frac{V}{(2\pi)^3c^3}\underbrace{\int_0^\infty x^3dx}_{\infty}\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^4 \propto T^4$$

熱力学からの議論

光子：$u(T) = 3P$

$dU = TdS - PdV + \mu dN$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -P + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

$$= -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \underset{\text{光子系}}{=} 3P \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{4P}{T} \Rightarrow P \propto T^4.$$

$dF = -SdT - PdV + \mu dN$

5. 量子理想気体

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,2} \qquad \text{状態}: Z = \sum_{\substack{\text{ALL STATES} \\ i}} e^{-\beta E_i}$$

$\mathcal{H}\psi_n = E_n \psi_n$ … 固有状態

$\phi_i = \sum_k c_{ik}\psi_k$ … 一般の状態

$$Z = \sum_n \langle \psi_n | e^{-\beta\mathcal{H}} | \psi_n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

∵ 完全系

$$\langle \psi_j | e^{-\beta\mathcal{H}} | \psi_m \rangle = \delta_{jm} e^{-\beta E_j}$$

$$Z = \sum_k \langle \phi_k | e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_k \rangle = \sum_{k,j,m} \langle \phi_k | \underline{\psi_j \rangle \langle \psi_j} | e^{-\beta\mathcal{H}} | \underline{\psi_m \rangle \langle \psi_m} | \phi_k \rangle$$

$$= \sum_{k,j} \langle \phi_k | \psi_j \rangle e^{-\beta E_j} \langle \psi_j | \phi_k \rangle \overset{\uparrow}{=} \mathrm{Tr}\left[U e^{-\beta\mathcal{H}} U^{-1} \right]$$

$\langle \phi_k | \psi_j \rangle = U_{kj}$

$$= \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\mathcal{H}} \right] \overset{\uparrow}{=} \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\mathcal{H}_D} \right]$$

OK

$$\exp\left[-\beta\mathcal{H}_D\right] = \begin{bmatrix} e^{-\beta E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-\beta E_N} \end{bmatrix}$$

$$Z = \sum_k e^{-\beta E_k} \neq \sum_k e^{-\beta \langle \phi_k | \mathcal{H} | \phi_k \rangle}$$

(固有状態のときのみ OK)

$E_k \approx \langle \phi_k | \mathcal{H} | \phi_k \rangle$??

$\frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}}$: 密度行列 (DENSITY MATRIX)

$$\langle \phi_k | \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_k \rangle = P_k .$$

5-1. 固有値

$\mathcal{H}\psi_n = E_n \psi_n$; $E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2^2\pi^2}{L^2}n^2 = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{L^2}n^2$

$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx}$; $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots, \pm\infty$

3次元 : $\boxed{E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{(2\pi)^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$

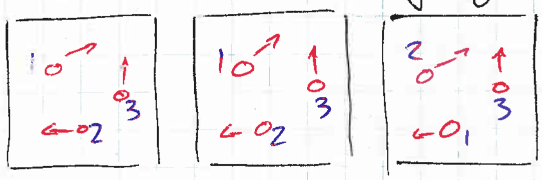
$$Z_1 = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty}\sum_{n_y=-\infty}^{\infty}\sum_{n_z=-\infty}^{\infty} e^{-\beta\frac{h}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)}$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3}\int k^2 dk\, e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}} \times 4\pi = \left(\frac{2\pi k_B T m}{h^2}\right)^{3/2} \times V$$

$Z = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$???

固有状態 $k = (n_x, n_y, n_z)$

古典



… 区別しない … $\frac{1}{N!}$

$k_1 = (0,0,0)$, $k_2 = (1,0,0)$, $k_3 = (1,1,0)$

・1	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
・2	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)
・3	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,1,0)
	1	2!	3! … N!

数えすぎの補正として $\frac{1}{N!}$
||
すべての粒子が異なる状態にある。