統計力学 (宮下精二)　中間テスト (11/19(金)

問題設定が不十分、不適当と思う場合はその旨を明記し、合理的な設定をして解答せよ。

[1] 正方格子上のイジング模型

$$\mathcal{H} = -J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j - H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \tag{1}$$

(ここで $<ij>$ は最近接格子点間のボンドについての和である。また、N はスピンの総数である。) が、温度 T で熱平衡にあるとする。以下の問に答えよ。

(1-1) $J=0$ の場合の、単位スピンあたりの内部エネルギー $E=\langle\mathcal{H}\rangle/N$、磁化 $m=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i/N$ の温度 T、磁場 H 依存性を求めよ。

(1-2) 次に $J\neq 0$ の場合を考える。平均場近似の説明をし、その方法を用いて $H=0$ の場合に常磁性、強磁性の相転移温度 T_{C} を求めよ。また、単位スピンあたりの内部エネルギー $E=\langle\mathcal{H}\rangle/N$、磁化 $m=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i/N$ の温度 T、磁場 H 依存性を求めよ。

(1-3) さらに、帯磁率 $\chi=(dm/dH)_{H=0}$ の温度依存性を求めよ。

(1-4) 相転移温度 T_{C} 直上で、磁化を磁場の関数 $m(H)$ を求めよ。

(1-5) 相転移温度 T_{C} 近くで、m_0,χ_0,m_H を定数として

$$m=m_0|t|^{\beta},\quad \chi=\chi_0|t|^{-\gamma},\quad m=m_Hh^{1/\delta},\quad \text{ただし}\ t=\frac{T-T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{C}}} \tag{2}$$

の形の特異性を持つことを確認し、臨界指数 β,γ,δ を求めよ。

(1-6) m の関数としての平均場近似の自由エネルギー $F(T,H:m)$ を求める方法を 1 つ説明し、その方法 $F(T,H:m)$ を求めよ。

(1-7) 上で求めた自由エネルギー $F(T,H:m)$ を m の 4 次まで展開し、相転移温度 T_{C} 付近での Laudau の自由エネルギーを具体的に書き出せ。

(1-8) 自由エネルギーが相転移温度 T_{C} 付近で $F(m)\propto|t|^{2-\alpha}$ の形になることを確認し、臨界指数 α を求めよ。

(1-9) 比熱の相転移温度 T_{C} 付近での振る舞いが $C\propto|t|^{-\alpha}$ で与えられることを示せ。

(1-10) 相転移温度 T_{C} 以下で起こる磁気ヒステリシス現象を $F(T,H:m)$ の概形を用いて説明せよ。

[2] 気相液相相転移をあらわす van der Waals 方程式

$$\left(P+a\left(\frac{N}{V}\right)\right)^2(V-bN)=Nk_{\mathrm{B}}T \tag{3}$$

の物理的意味を説明せよ。(P,V,N,T は、それぞれ圧力、体積、粒子数, 温度)

[3] 気相液相相転移をあらわす模型をイジング模型を用いて考案せよ。

[4] 周期境界条件をもつ 1 次元イジング模型 (磁場なし) の分配関数を求めよ。

$$\mathcal{H}=-J\sum_{i=1}^{L}\sigma_i\sigma_{i+1},\quad \sigma_{L+1}=\sigma_1 \tag{4}$$