統計力学II

Universality class

いろいろ異なる同じ相転移を示す → 相転移の $university$
Ising unversality class

- 磁性体 (容易軸型、一軸異方性)
- 気相液相
- 合金
- スピンクロスオーバー

Ising 模型以外のモデル

- 2 → 3
$$\mathcal{H} = -J\sum\langle i,j\rangle\delta_{\sigma_i,\sigma_j} \quad (\sigma_i = 1,2,\dots q)$$
- q state Potts 模型（ポッツ木原）　q>3(Zq 模型)
- q-状態クロック模型
$$s_j = \theta_j = \frac{2\pi j}{6} \quad j = 1,2,\dots q-1$$
$$\mathcal{H} = -J\sum cos(\theta_i - \theta_j)$$
- 連続スピン模型　O(n) 模型
  XY 模型 (容易面型)
$$S = (s_x, s_y) = (\cos\theta, \sin\theta)$$
  ゆらぎ・・・vortex(±1)
  トポロジカルな励起 →Kosterliztz-Thouless 相転移
$$XY = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} \quad n = 2$$
  Heisenberg 模型 n=3

転送行列の方法

一次元 Ising 模型
$$\mathcal{H} = -J(\sigma_1\sigma_2 + \dots \sigma_{N-1}\sigma_N + \sigma_N\sigma_1)$$
$$Z = \sum_{\sigma_i=\pm1} e^{\beta J(\sigma_1\sigma_2+\cdots+\sigma_{N-1}\sigma_N)}$$

$Z_k(\sigma_1, \sigma_k)$ をσ_1, σ_kを固定して$\sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}$の和をとったものとすると
$$Z = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_N} Z(\sigma_1, \sigma_N)$$

$$\hat{Z}_{k+1} = \begin{bmatrix} Z_{k+1}(++) & Z_{k+1}(-+) \\ Z_{k+1}(+-) & Z_{k+1}(--) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{k+1}(++) & Z_{k+1}(-+) \\ Z_{k+1}(+-) & Z_{k+1}(--) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_2(++) & Z_2(-+) \\ Z_2(+-) & Z_2(--) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{bmatrix}$$

より

$$\hat{Z}_{k+1} = \begin{bmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{bmatrix}^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2\cosh K)^k + (2\sinh K)^k & (2\cosh K)^k - (2\sinh K)^k \\ (2\cosh K)^k - (2\sinh K)^k & (2\cosh K)^k + (2\sinh K)^k \end{bmatrix}$$

自由端境界条件のとき

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1, \sigma_N=\pm 1} Z_N(\sigma_1, \sigma_N) = 2(2\cosh K)^{N-1}$$

周期的境界条件のとき

$$Z = \sum_{\sigma_1=\sigma_N=\pm 1} Z_{N+1}(\sigma_1, \sigma_N) = Z_{N+1}(++) + Z_{N+1}(--) = Tr\hat{Z}_{N+1} = (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N$$

また相関関数は

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S, Z_1 = \begin{bmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_i \sigma_j \rangle &= \frac{\sum \exp[K(\sigma_1\sigma_2 + \cdots + \sigma_{i-1}\sigma_i)]\sigma_i \exp[K(\sigma_i\sigma_{i+1} + \ldots \sigma_{j-1}\sigma_j)]\sigma_j \exp[K(\sigma_j\sigma_{j+1} \ldots \sigma_N\sigma_1)]}{\sum \exp[K(\sigma_1\sigma_2 + \cdots + \sigma_N\sigma_1)]} \\
&= \frac{\sum Z_{i-1}(\sigma_1\sigma_i)\sigma_i Z_{j-i}(\sigma_i\sigma_j)\sigma_j Z_{N-j+1}(\sigma_j\sigma_{N+1})}{Z_N(++) + Z_N(--)} \\
&= \frac{Tr\hat{Z}_{i-1}S\hat{Z}_{j-1}S\hat{Z}_{N-j+1}}{TrZ_N} \\
&= \frac{TrSZ_1^{j-1}SZ_1^{N-j+i}}{TrZ^N}
\end{aligned}$$

ここで

$$Z_1|\lambda_\pm\rangle = \lambda_\pm|\lambda_\pm\rangle, |\lambda_\pm\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \lambda_+ = 2\cosh K, \lambda_- = 2\sinh K$$

とすると

$$\langle \lambda_+|SZ_1^{j-i}SZ_1^{N-j+i}|\lambda_+\rangle = \lambda_-^{j-i}\lambda_+^{N-j+i} + \lambda_+^{j-i}\lambda_-^{N-j+i}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_i \sigma_j \rangle &= \frac{(2\cosh K)^{j-i}(2\sinh K)^{N-j+i} + (2\cosh K)^{N-j+i}(2\sinh K)^{j-i}}{(2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N} \\
&= \frac{(\tanh K)^{j-i} + (\tanh K)^{N-j+i}}{1 + (\tanh K)^N} \\
&\approx (\tanh K)^{j-i} \\
&= e^{(j-i)\ln(\lambda_-/\lambda_+)} = e^{-(j-i)/\xi}
\end{aligned}$$

よって相関長 $\xi = \frac{1}{|\ln(\lambda_-/\lambda_+)|}$