

統計力学特論 レポート問題 (第 2 回 締め切り 7/31 日)

(*1,*2,*3 に関しては、任意提出とする。提出するものは、どれか一つ選んで回答すればよい。この部分は追加提出として 8 月 8 日までに出してもよい。もちろん、7/31 日までに、他の必須問題と一緒にの出してもよい。)

(1) 2 次元 XY 模型

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle}^{N-1} \cos(\theta_i - \theta_j) - H \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i) \quad (1)$$

の低温でのスピン相関関数が冪的緩和

$$\langle \cos(\theta_i - \theta_j) \rangle \propto r^{-\eta}, \quad r \text{ は格子点 } i, j \text{ 間の距離} \quad (2)$$

になることを調和近似の範囲で示し、その冪の温度依存性も求めよ。

(2) ペロン・フロベニウスの定理：

「正の正方行列は正の固有値を持ち、その最大のは単純特性根である。」を示せ。

(3) 熱浴法を用いた 2 次元 Ising 模型のモンテカルロ法のプログラムを作成せよ。

(*1 実行結果があると望ましい。)

(4) はしご格子 ($2 \times \infty$) の強磁性 Ising 模型の内部エネルギーを温度の関数として求めよ。

相互作用は全てのボンドで共通とする。系の長さは無限大とし、境界条件の効果は考えなくてよい。

(*2 はしごの幅を増やして、 $M \times \infty$ の格子の転送行列がどのような形に書かれる考察し、2 次元 Ising 模型の分配関数について考察があると望ましい。)

(5) 三角格子反強磁性 Ising 模型 (相互作用 $J < 0$) が、副格子間に強磁性相互作用 ($J_2 > 0$) をもつとき

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle: \text{三角格子最近接}} \sigma_i \sigma_j - J_2 \sum_{\langle ik \rangle: \text{三角格子次近接}} \sigma_i \sigma_k \quad (3)$$

の相転移を平均場近似を用いて調べるためのセルフコンシステント方程式を示せ。

またその方程式において、無秩序秩序から温度を下げていったとき最初に現れる秩序状態と、その臨界温度を求めよ。(*3 全温度での秩序形態をセルフコンシステント方程式から数値的に求めると望ましい。)

(6) その他、相転移に関して一つテーマをあげ、それについて説明せよ。

(授業で取り上げたテーマでもよいが、レポート問題になっているものは避ける。)