6/2

# 調和振動子(量子)

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \quad (k = m\omega^2)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (\omega\text{に依存する})$$

# 連成振動

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{M} \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j$$

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_M \end{pmatrix}$$

古典系

$$Z = \prod_{j=1}^{M} \sqrt{2\pi m k_B T} \sqrt{\frac{\pi k_B T}{\lambda_i}}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = M k_B T$$

量子系

$$E = \sum_{j=1}^{M} \frac{\hbar\omega_j}{2} + \frac{\hbar\omega_j}{e^{\beta\hbar\omega_j} - 1} \qquad \left(\omega_j = \sqrt{\frac{2\lambda_j}{m}}\right)$$

($\omega_j$に依存する)

$$\left(\because \mathcal{H} = \sum_{j=1}^{M} \frac{P_j^2}{2m} + \lambda_j \xi_j^2\right)$$

↳ $\omega$に分布がある時を調べる.

# 黒体輻射

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \vec{H} \\ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, \vec{E} \\ \varepsilon_0\, \mathrm{div}\, \vec{E} = 0 \\ \mathrm{div}\, \vec{B} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

波動方程式

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \qquad \left( c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right)$$

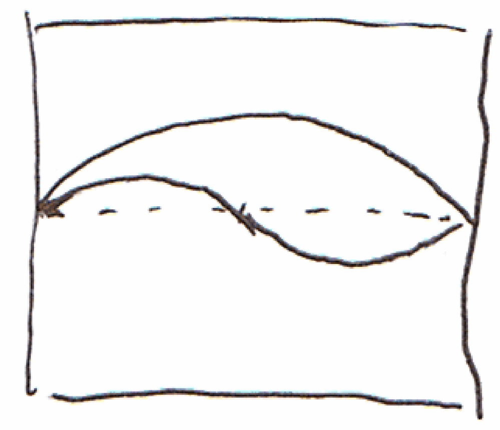
ベクトルポテンシャル $\vec{A}$

$$\mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{B}$$

波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0$$

境界条件(固定端)



$\vec{A}$ を Fourier モードに分ける

$$\vec{A} = \sum_{i=1,2} \sum_{\alpha} \left( q_\alpha^{(i)} \vec{A}_\alpha^{(i)} + \bar{q}_\alpha^{(i)} \vec{\bar{A}}_\alpha^{(i)} \right) \qquad (i: 偏向のモード)$$

$$\left( \begin{array}{l} \vec{A}_\alpha^{(i)} \propto e^{i \vec{k}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{x}} \\ \vec{\bar{A}}_\alpha^{(i)} \propto e^{-i \vec{k}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{x}} \end{array} \right)$$

代入すると

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} q_\alpha^{(i)} = -\omega_\alpha^{(i)2} q_\alpha^{(i)} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \bar{q}_\alpha^{(i)} = -\omega_\alpha^{(i)2} \bar{q}_\alpha^{(i)} \end{cases} \qquad \left( \omega_\alpha^{(i)2} = k_\alpha^2 c^2 \right)$$

$$\left[ \begin{array}{l} Q_\alpha^{(i)} \equiv q_\alpha^{(i)} + \bar{q}_\alpha^{(i)} \\ P_\alpha^{(i)} \equiv -i \omega_\alpha^{(i)} \left( q_\alpha^{(i)} - \bar{q}_\alpha^{(i)} \right) \end{array} \right. \quad \text{とおくと} \quad \left[ \begin{array}{l} \dfrac{dQ_\alpha^{(i)}}{dt} = P_\alpha^{(i)} \\ \dfrac{dP_\alpha^{(i)}}{dt} = -\omega_\alpha^{(i)2} Q_\alpha^{(i)} \end{array} \right.$$

⇒ この運動を表すハミルトニアン

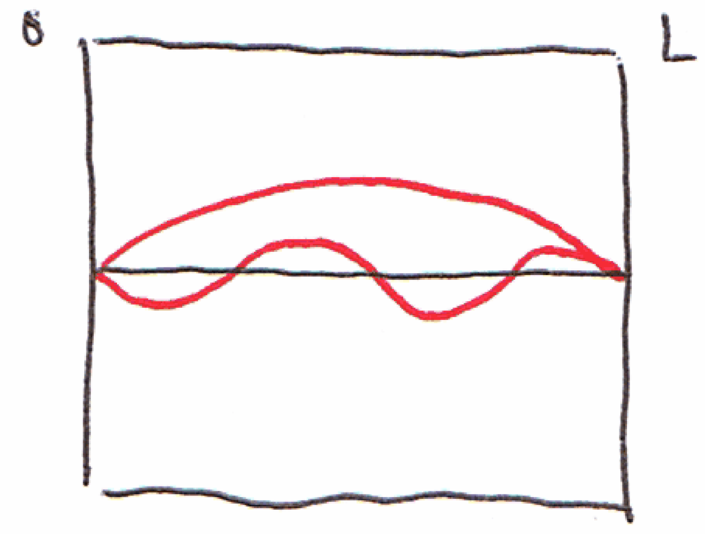
$$\mathcal{H}_\alpha^{(i)} = \frac{1}{2} \left( P_\alpha^{(i)2} + \omega_\alpha^{(i)2} Q_\alpha^{(i)2} \right)$$

系全体のハミルトニアンを $\mathcal{H}$ とすると

$$\mathcal{H} = \sum_i \sum_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{(i)}$$ (波数 $k_\alpha$ (分散関係 $\omega_\alpha^{(i)} = c k_\alpha^{(i)}$) を持つ調和振動子の集まり)

・一辺が L の立方体の中にどのような波数 $k$ をもつモードが存在するか

境界条件（固定端）



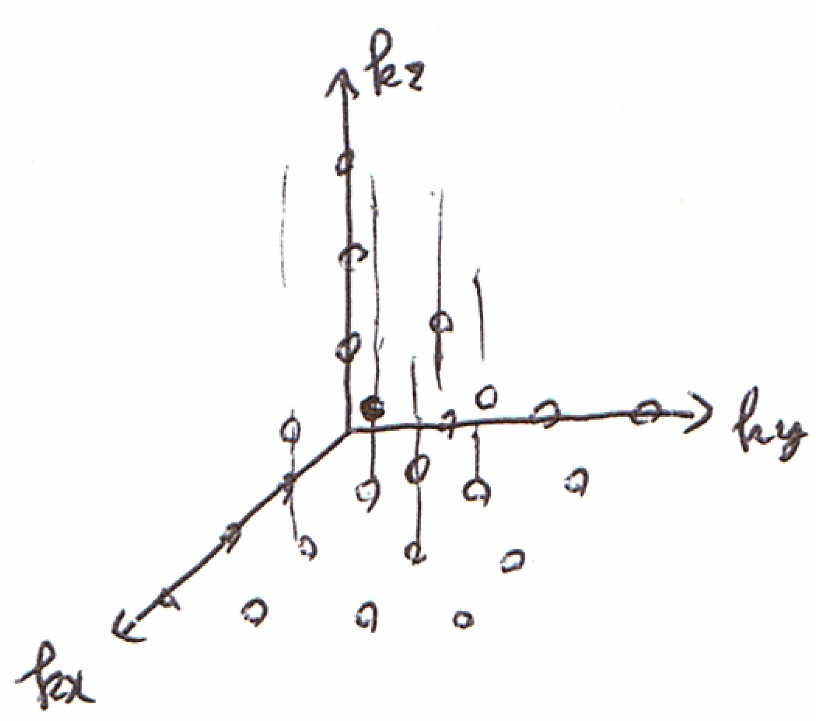
$\psi_1 \propto \sin\frac{\pi x}{L}$

$\psi_n \propto \sin\frac{\pi n x}{L}$ $\rightarrow k = \frac{\pi n}{L} \quad (n = 1, \cdots, \infty)$

3次元

$$(k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (n_x, n_y, n_z = 1, \cdots \infty)$$

波数の大きさが $k \sim k + dk$ であるモードの数



黒体輻射のエネルギー

$$2 \times \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} E\left(\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right)$$

↑
モードの数

$$= 2 \times \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} E(\omega)$$

↓ 角度によらない（極座標表示）

第1象限だけが寄与する →

$$= \frac{1}{8} \int_0^\infty (4\pi n^2)\, dn \; 2E(\omega)$$

↓ $\omega = ck = c\frac{\pi}{L}n$

$$= \left(\frac{L}{c\pi}\right)^3 \int_0^\infty 4\pi \omega^2 d\omega \; 2E(\omega) \times \frac{1}{8}$$

エネルギースペクトル

（$\omega$ を持つモードのエネルギー）

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L}{c\pi}\right)^3 \omega^2 \; 2E(\omega)$$

古典

$E(\omega) = k_B T$

$$\hat{E}(\omega) = V \frac{\pi}{2} \frac{1}{(c\pi)^3} \omega^2 \cdot 2 k_B T$$

$$= k_B T \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2$$ Rayleign - Jeans の輻射法則

・ $\int_0^\infty \hat{E}(\omega) d\omega \to \omega^3 \Big]_0^\infty = \infty$ ?

・ $$\int_0^\infty \hat{E}(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{\pi}{2} \left(\frac{L}{c\pi}\right)^3 \omega^2 2 k_B T \, d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{L}{c\pi\hbar}\right)^3 2 (k_B T)^4 \int_0^\infty x^2 dx$$ $(\hbar\omega = k_B T x)$

$\propto T^4$ Stefan - Bortzmann の公式

S-B 公式

$$u(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

電磁気的な性質

$u(T) = 3P$

$$\to 3P = -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Leftrightarrow \frac{4P}{T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$\therefore$

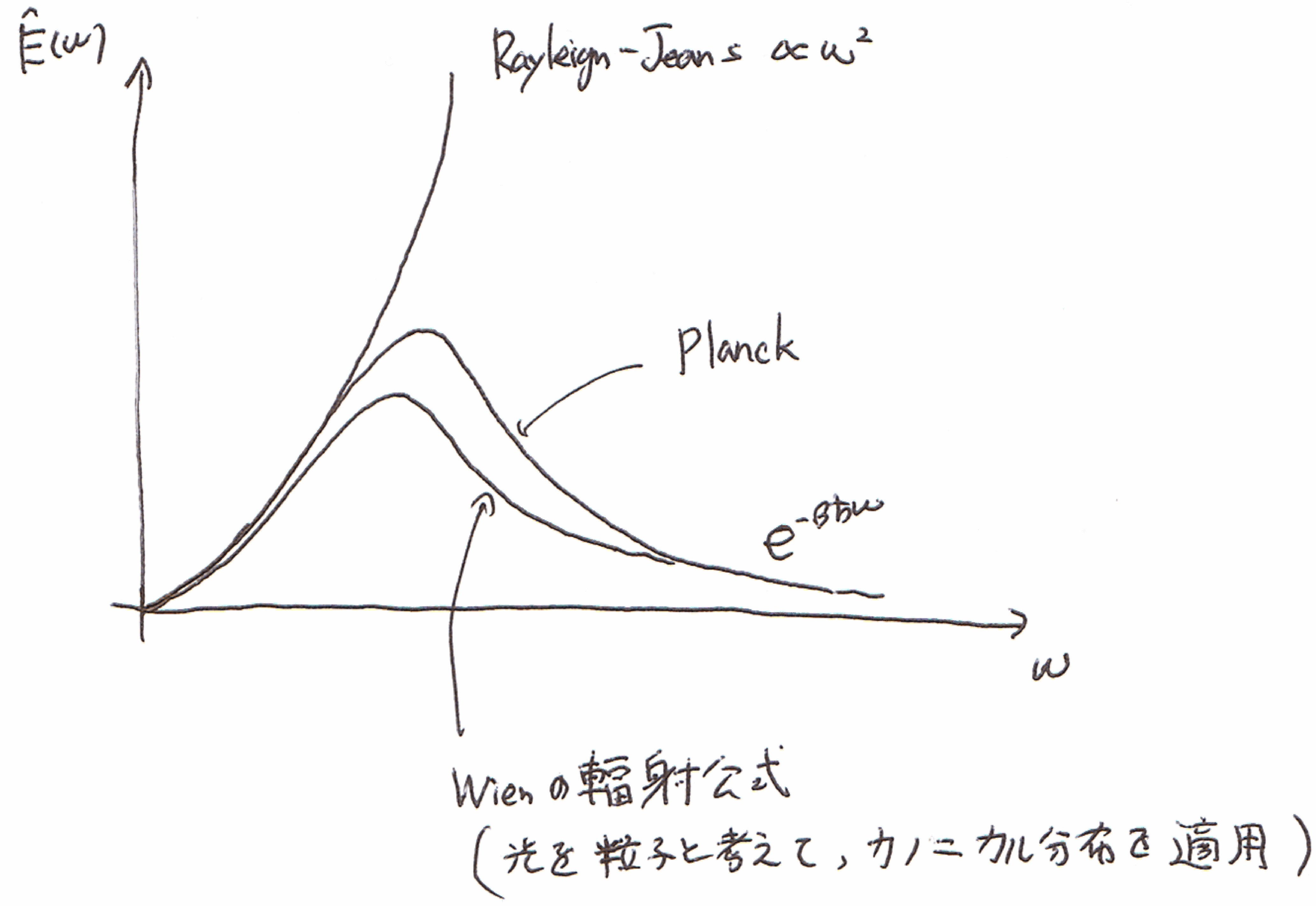
$P \propto T^4, \ u \propto T^4$

量子

$$E(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\hat{E}(\omega) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \frac{V}{c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \omega^2$$

$$\left( \begin{array}{lcl} \beta \to 0, \ \hbar \to 0 & \multirow{2}{*}{$\to$} & \text{Rayleign Jeans} \\ \beta \to 大 & & e^{-\beta\hbar\omega} \omega^2 \end{array} \right)$$


Ê(ω)
Rayleigh-Jeans ∝ω²
Planck
e^{-βħω}
ω
Wienの輻射公式
(光を粒子と考えて，カノニカル分布を適用)