統計力学 中間試験(2004/6/1) 問題

宮下 精二

問題1 N 個の格子点の上に，３状態 (A,B,C) を持つ系があり，温度 T で熱平衡にある場合を考える．状態 (A,B,C) のエネルギーをそれぞれ ϵ,0,$-\epsilon$ とする．

(1) この系の内部エネルギー，比熱を求めよ．

(2) 温度 T で ϵ を変化させたときの内部エネルギーの変化を求め，その振舞を定性的に説明せよ．

問題2 体積が V の容器に閉じ込められている N 個の粒子 (質量 m) からなる理想気体が温度 T で熱平衡状態にある場合を考える．

(1) 内部エネルギーを温度の関数として求めよ．

(2) 圧力を温度の関数として求めよ．

(3) エントロピーを温度の関数として求めよ．

(4) 化学ポテンシャルを温度の関数として求めよ．

問題3 一次元調和振動子

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2$$

があり，温度 T で熱平衡状態にある場合を考える．

(1) この系を古典力学で考えた場合に，エネルギー，比熱を温度の関数として求めよ．

(2) この系を量子力学で考えた場合に，エネルギー，比熱を温度の関数として求めよ．

(3) 十分低温で量子効果が効いて来る場合に，比熱の振舞が古典系の場合とどの様にかわるか，定量的に説明せよ．ただし，

$$\mathcal{H}\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x), \qquad E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{Q-1}$$

を用いてよい．

問題4 一辺が L の直方体の領域を考え，周期境界条件を課す．この直方体内に存在する弾性波を考える．波の波数を (k_x, k_y, k_z) とする．

(1) k_x が取りうる値を示せ．

(2) 波数の大きさ $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ が $k \sim k + dk$ にある波数の数を求めよ．

(3) 角振動数 ω が $\omega \sim \omega + d\omega$ にある波のエネルギー密度を求めよ．ただし，波のタイプ (縦波，横波) に依らず分散関係を $\omega = kv$ とする．

(4) 低温での比熱の温度依存性を議論せよ．