統計力学 中間試験(2004/6/1) 解答

田中 宗*

６月１日の統計力学の講義中に実施した中間試験の解答です.
大まかな採点基準も示してあるので，参考にしてください．満点は 60 点です．尚，理由を書かず，答えのみ記入してあるものは 1 点減点としています．また，答えのみの記述の場合は正解以外には部分点は付けません．計算ミスについては，適宜判断して採点しています.

試験問題に訂正すべき箇所があったので，記します.

訂正箇所

問題１ 誤 状態 A,B のエネルギーをそれぞれ ϵ,0,$-\epsilon$ とする.

正 状態 A,B,**C** のエネルギーをそれぞれ ϵ,0,$-\epsilon$ とする.

問題２ 誤 N 個の粒子 (質量 m) からなる理想気体

正 N 個の粒子 (質量 m) からなる**単原子**理想気体

問題３ 誤 一次元調和振動子があり，温度 T で熱平衡状態にある場合を考える.

正 **独立な** N **個の**一次元調和振動子があり，温度 T で熱平衡状態にある場合を考える.

問題４ 誤 (文中の) 直方体

正 **立方体**

以降，断り無く $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする.

*居室：218　　shu-t@spin.t.u-tokyo.ac.jp
統計力学演習の問題は次の WEB ページに掲載します。
http://spin.t.u-tokyo.ac.jp/ ~shu-t/enshu/enshu.html

問題１ **(1)** 内部エネルギーは,

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = N\cdot\frac{-\epsilon e^{\beta\epsilon}+\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon}+1+e^{-\beta\epsilon}} = N\cdot\frac{-2\epsilon\sinh\beta\epsilon}{1+2\cosh\beta\epsilon} \tag{A-1}$$

となる．また比熱は,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\frac{\partial E}{\partial\beta} = \frac{N}{k_{\mathrm{B}}T^2}\cdot\frac{2\epsilon^2\cosh\beta\epsilon\,(1+2\cosh\beta\epsilon)-(2\epsilon\sinh\beta\epsilon)^2}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2} \\ &= \frac{2N\epsilon^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{2+\cosh\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2} \end{aligned}$$

となる．

別解

分配関数は,

$$Z = (1+2\cosh\beta\epsilon)^N$$

だから，ヘルムホルツの自由エネルギーは,

$$F = -Nk_{\mathrm{B}}T\log(1+2\cosh\beta\epsilon)$$

である．よって，内部エネルギーは

$$E = N\cdot\frac{-2\epsilon\sinh\beta\epsilon}{1+2\cosh\beta\epsilon}$$

となる．比熱は上記または下記の方法により求めれば良い．

別解

$$\begin{aligned} \langle E^2\rangle &= N^2\frac{\sum_i E_i^2 e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = 2N^2\epsilon^2\frac{2\cosh^2\beta\epsilon+\cosh\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2} \\ \langle E\rangle^2 &= N^2\frac{4\epsilon^2\sinh^2\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2} \end{aligned}$$

で，比熱は,

$$C = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\left(\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2\right) = \frac{2N^2\epsilon^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{2+\cosh\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2}$$

となる．

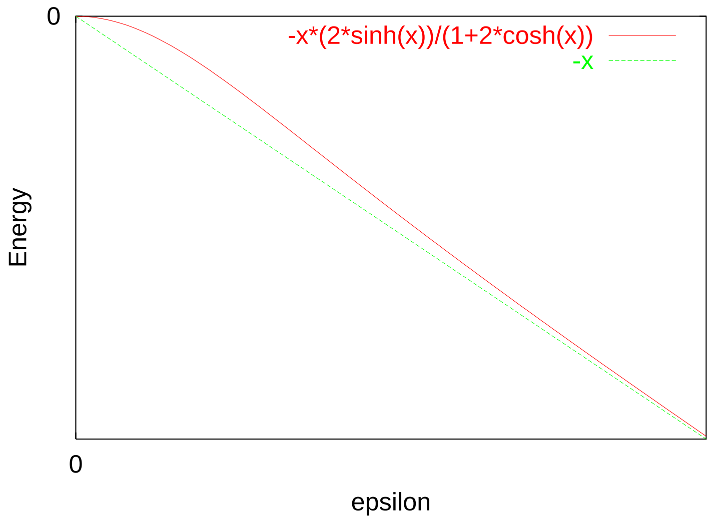
(2) 式 (A-1) より，$\epsilon\to 0$ で $E=0$，$\epsilon\to\infty$ で $E=-N\epsilon$ となる．式 (A-1) をより詳細に解析しよう．

$$E = -N\epsilon\frac{2\sinh\beta\epsilon}{1+2\cosh\beta\epsilon} = -N\epsilon f(\epsilon)$$

として，$f(\epsilon)$ の振舞を見よう．

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial\epsilon} &= 2\beta\frac{2+\cosh\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^2} > 0 \\ \frac{\partial^2 f(\epsilon)}{\partial\epsilon^2} &= -2\beta^2\sinh\beta\epsilon\frac{\cosh 2\beta\epsilon}{(1+2\cosh\beta\epsilon)^4} < 0 \end{aligned}$$

より，上に凸な関数となる．故に E と ϵ の振舞はグラフにすると，以下のようになる．このように，$\epsilon\to\infty$ で $-N\epsilon$ に漸近していることが見て取れる．



問題１　採点基準 (配点：12 点)

- (1) で内部エネルギーが求められた．(**4 点**)
- (1) で比熱が求められた．(**4 点**)
- (2) で $\epsilon \to 0$ で $E = 0$，$\epsilon \to \infty$ で $E = -N\epsilon$ となることが言えた．(**4 点**)

部分点は以下の通り．

- (1) で内部エネルギーと比熱の両方とも間違えたが，分配関数は正確に求められている．(**2 点**)
- 別解の方針を採った者について，比熱の表式を間違えたが，$\langle E \rangle^2$，$\langle E^2 \rangle$ は正しい．(**各 1 点**)
- (2) で，$\frac{\partial E}{\partial \epsilon}$ をただ計算しただけ．(**2 点**)
- (2) で，$\frac{\partial E}{\partial \epsilon} > 0$ を言ったが、具体的に問題解答になっていない．(**3 点**)

問題２ **(1)** 系の分配関数は,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!}\cdot\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\cdot\int\cdots\int\exp\left(-\frac{1}{2mk_{\mathrm{B}}T}\sum_i^N\mathbf{p}_i^2\right)d\mathbf{p}_1\cdots d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_N \\ &= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left[\int\exp\left(-\frac{p^2}{2mk_{\mathrm{B}}T}dp\right)\right] \\ &= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(2\pi mk_{\mathrm{B}}T\right)^{\frac{3N}{2}} \end{aligned}$$

である．よって，ヘルムホルツの自由エネルギーは,

$$\begin{aligned} F &= -k_{\mathrm{B}}T\left(\log V^N-\log N!-\log(2\pi\hbar)^{3N}+\log(2\pi mk_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3N}{2}}\right) \\ &= -Nk_{\mathrm{B}}T\left(\log\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}+1\right) \end{aligned}$$

となる．故に，内部エネルギーは,

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F)=\frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T$$

別解

いま，ハミルトニアンは一般化座標 (p,q) の 2 次形式で書かれており，$3N$ 個の項があるから，等分配則により,

$$E=\frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T$$

となる．

(2) 圧力は，$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$ だから,

$$p=\frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{V}$$

別解†

理想気体の状態方程式より

$$p=\frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{V}$$

(3) エントロピーは，$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$ だから,

$$S=Nk_{\mathrm{B}}\left(\log\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}+\frac{5}{2}\right) \tag{A-2}$$

である．

別解

$F=E-TS$ より，$S=\frac{E-F}{T}$ だから,

$$S=Nk_{\mathrm{B}}\left(\log\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}+\frac{5}{2}\right)$$

(4) 化学ポテンシャルは，$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$ だから,

$$\mu=-k_{\mathrm{B}}T\left(\log\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)$$

†ただし上でも別解，ここでも別解で解いてしまうと，ヘルムホルツの自由エネルギーが出て来ないので，エントロピー算出が簡単にはできないでしょう．それに，ヘルムホルツの自由エネルギーの有用性を統一的に理解するには，(2)〜(4) で解答に示した方法で理解するのも大切です．

である．

別解

化学ポテンシャルは，１分子あたりのギブスの自由エネルギーである．ギブスの自由エネルギーは,

$$
\begin{aligned}
G &= F + pV = -Nk_{\mathrm{B}}T\left(\log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right) \\
\mu &= -k_{\mathrm{B}}T\left(\log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\log\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)
\end{aligned}
$$

別解

ミクロカノニカルの方法を用いて，エネルギーを求めてみよう．エネルギーが E より小さい状態数を $\Omega(E)$ とすると,

$$
\Omega(E) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}}\frac{2\pi^{\frac{3N}{2}}}{3N\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}(2mE)^{\frac{3N}{2}}
$$

故に，エネルギーが $E \sim E + dE$ の範囲にある状態数 $W(E)$ は,

$$
W(E) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}}\frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}\frac{(2mE)^{\frac{3N}{2}}}{E}dE
$$

である．よって，エントロピーは,

$$
S(E) = k_{\mathrm{B}}\log W(E) = Nk_{\mathrm{B}}\left(\log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\log\frac{4\pi mE}{3(2\pi\hbar)^2 N} + \frac{5}{2}\right) \tag{A-3}
$$

となる．$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ より,

$$
\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}\frac{1}{E} = \frac{1}{T}
$$

となるから,

$$
E = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T
$$

である．これを式 (A-3) に代入すれば，式 (A-2) が導出される．ヘルムホルツの自由エネルギーは，$F = E - T \cdot S$ により求められるので，圧力や化学ポテンシャルは上で示した解答と同様に求められる．

問題 2　採点基準 (配点：16 点)

- 各設問の結果が合っている．(**各 4 点**) ただし，理由を明記しておらず，答えのみ記してあるものは**各 1 点減点**．具体的には以下を参照のこと．

部分点は以下の通り．

- (1) で内部エネルギーは誤っているが，分配関数は正しい表式となっている．(**2 点**)
- (1) で分配関数を導出してから内部エネルギーを求めている者について，$\frac{1}{N!}$ の項が無い．(**2 点減点**)
- (1) で別解の方針を採った者について，等分配則を適用することについて記述が無い．(**1 点減点**)
- (2) で理想気体の状態方程式から，もしくは $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$ などの記述が無い．(**1 点減点**)
- (3) で $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$，もしくは $S = \frac{E-F}{T}$ などの記述が無い．(**1 点減点**)
- (4) で $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$，もしくは $G = N\mu$ などの記述が無い．(**1 点減点**)
- (3),(4) で規格化定数 C のまま結果にしている．(**各 1 点減点**)
- 全体としての別解を採っている者について，式 (A-3) の表式までしか辿り着けなかった．もしくは温度の関数として表し損ねた．(**2 点**)
- 全体として，1 次元の理想気体と勘違いした解答．(影響が在る問いに関し，**各 2 点減点**)

問題３ **(1)** 古典力学で考えたとき，分配関数は,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\int\cdots\int \exp\left[-\beta\left(\frac{1}{2m}p^2+\frac{k}{2}x^2\right)\right]dp_1\cdots dp_N dx_1\cdots dx_N \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left[\int \exp\left(-\beta\frac{p^2}{2m}\right)dp\right]^N\left[\int \exp\left(-\beta\frac{k}{2}x^2\right)dx\right]^N \\ &= \frac{(k_\mathrm{B}T)^N}{\hbar^N}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

であるから，ヘルムホルツの自由エネルギーは,

$$F=-k_\mathrm{B}T\log Z=Nk_\mathrm{B}T\log\beta\hbar+\frac{N}{2}k_\mathrm{B}T\log\frac{k}{m}$$

となる．故に，内部エネルギーは,

$$E=\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F)=Nk_\mathrm{B}T$$

比熱は,

$$C=\frac{\partial E}{\partial T}=Nk_\mathrm{B}$$

となる．

別解

ハミルトニアンが p と x の 2 次形式で書かれていて，$2N$ 個の和からなるから，等分配則により,

$$\begin{aligned} E &= Nk_\mathrm{B}T \\ C &= Nk_\mathrm{B} \end{aligned}$$

となる．

(2) 量子力学で考えたとき，分配関数は,

$$Z=\{\sum_i^\infty \exp\left[-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\}^N=\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)^N$$

である．故に自由エネルギーは,

$$F=\frac{1}{2}N\hbar\omega+Nk_\mathrm{B}T\log\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

となる．よって，内部エネルギーは,

$$E=\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F)=\frac{1}{2}N\hbar\omega+\frac{N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

となる．よって比熱は,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial E}{\partial T}=-\frac{1}{k_\mathrm{B}T^2}\frac{\partial E}{\partial\beta}=\frac{N\hbar^2\omega^2}{k_\mathrm{B}T^2}\left[\frac{\beta e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}-\frac{e^{-2\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^2}\right] \\ &= \frac{N\hbar^2\omega^2}{k_\mathrm{B}T^2}\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2} \qquad \text{(A-4)} \end{aligned}$$

別解

分配関数は

$$Z=\left(2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^{-N}$$

である．ヘルムホルツの自由エネルギーは，

$$F = -Nk_{\mathrm{B}}T\log\left(2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$$

となる．よって，内部エネルギーは，

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = -\frac{N\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

である．また，

$$\begin{aligned}\langle E^2\rangle &= \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}\right) = N(N+1)(\hbar\omega)^2\frac{1}{4}\coth^2\frac{\beta\hbar\omega}{2} - \frac{N}{4}(\hbar\omega)^2 \\ \langle E\rangle^2 &= \left(-\frac{N\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^2\end{aligned}$$

より，比熱は，

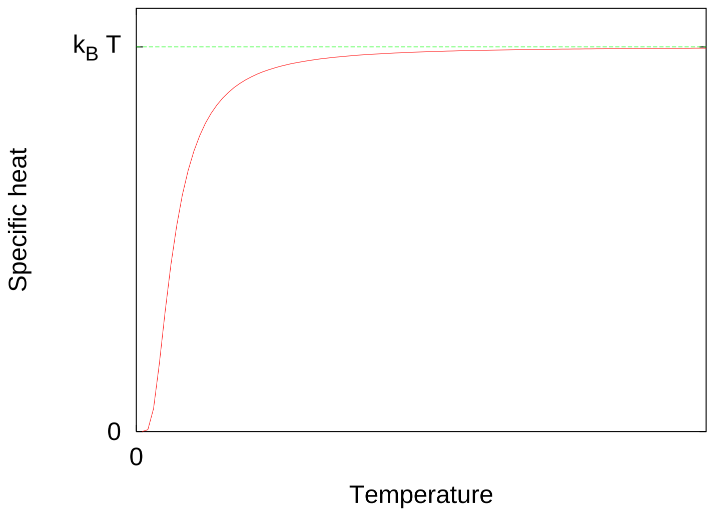
$$C = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\left(\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2\right) = \frac{N(\hbar\omega)^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}$$

となる．

(3) 十分低温で量子力学的効果が効いてくると，比熱の振舞は，式 (A-4) で $T \to 0(\beta \to \infty)$ とすればよいから，

$$C \to \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}e^{-\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}}$$

で 0 に漸近し，熱力学第 3 法則の主張と違わない．一方量子力学的効果を取り入れないで求めた比熱は，温度に依存せず，常に Nk_{B} となる．これは，熱力学第 3 法則に反するものである．また，量子力学から求めた比熱のグラフは以下のようになる．



問題 3　採点基準 (配点：12 点)

- 各設問の結果が正しい．(**各 4 点**) ただし，理由を明記しておらず，答えのみ記してあるものは**各 1 点減点**．具体的には以下を参照のこと．ただし，問題文中に欠けていた「N 個の独立な」という条件は「1 個の」調和振動子で解いた者についても減点はしない．

部分点は以下の通り．

- (1) で内部エネルギー，比熱は誤っているが，分配関数は正しい表式となっている．(**2 点**)
- (1) で分配関数を導出してから内部エネルギーを求めている者について，$\frac{1}{N!}$ の項を入れた．(**2 点減点**)
- (1) で別解の方針を採った者について，等分配則を適用することについて記述が無い．(**1 点減点**)
- (1) で 1 次元の理想気体と勘違いした解答．(**2 点減点**)
- (2) で内部エネルギー，比熱は誤っているが，分配関数は正しい表式となっている．(**2 点**)
- (2) で比熱は誤っているが，内部エネルギーの表式は正しい．(**3 点**)
- (2) で別解の方針を採った者について，比熱は誤っているが，内部エネルギー，$\langle E\rangle^2$,$\langle E^2\rangle$ の表式は正しい．(**3 点**)
- (3) で理由無く $C \to 0$ と答えだけ記す．(**1 点減点**)
- (3) で比熱が「小さくなる」とだけ言及．(**2 点**)

問題 4 (1) シュレーディンガー方程式は,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z)$$

変数分離して,

$$\begin{aligned}\Psi(x,y,z) &= X(x)Y(y)Z(z)\\ E &= E_x+E_y+E_z\end{aligned}$$

とする．すると,

$$\begin{cases}\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{2mE_x}{\hbar^2}=-k_x\\ \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-\frac{2mE_y}{\hbar^2}=-k_y\\ \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-\frac{2mE_z}{\hbar^2}=-k_z\end{cases}$$

である．さて，x について解くと，A_x 及び ϕ_x を積分定数として,

$$X(x)=A_x\cos(k_x x+\phi_x)$$

となる．いま周期境界条件が課せられているから，$X(x)=X(x+L)$ より，n_x を任意整数として,

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x$$

が波数の取り得る値である．

(2) (1) より $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ に 1 つの (k_x,k_y,k_z) の組が対応している．故に，波数空間の単位体積当り，$3\times\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\left(=\frac{3V}{8\pi^3}\right)$ 個の状態がある．ここで 3 を乗じた理由は，弾性波は縦波 1 つ，横波 2 つの計 3 つの自由度があるからである．以上の議論から，$k\sim k+dk$ に在る状態の数は,

$$\mathcal{D}(k)\,dk=\frac{3V}{8\pi^3}\cdot 4\pi k^2dk=\frac{3Vk^2}{2\pi^2}dk \tag{A-5}$$

である．

(3) $\omega=k\cdot v$ より，式 (A-5) は,

$$\mathcal{D}(\omega)\,d\omega=\frac{3V}{2\pi^2 v^3}\omega^2 d\omega$$

となる．故にエネルギー密度は，古典力学の範疇では,

$$\epsilon(\omega)\,d\omega=k_{\mathrm{B}}T\frac{3V}{2\pi^2v^3}\omega^2d\omega$$

となり，量子力学では,

$$\epsilon(\omega)\,d\omega=\left(\frac{1}{2}\hbar\omega+\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right)\frac{3V}{2\pi^2v^3}\omega^2d\omega$$

となる．

(4) エネルギーは (3) で求めたエネルギー密度 $\epsilon(\omega)\,d\omega$ を用いて,

$$E=\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\epsilon(\omega)\,d\omega$$

と表される．ここで，ω_D は,

$$\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\mathcal{D}(\omega)\,d\omega=3N$$

より，

$$\omega_{\mathrm{D}} = v\left(\frac{6N\pi^2}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

である．古典力学の範疇では，エネルギーは

$$E = \int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} \epsilon(\omega)\, d\omega = k_{\mathrm{B}}T \int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} \mathcal{D}(\omega)\, d\omega = 3Nk_{\mathrm{B}}T$$

よって，比熱は

$$C = 3Nk_{\mathrm{B}}$$

となる．これは温度に依存しない結果だから，低温でも一定値 $C = 3Nk_{\mathrm{B}}$ である．
一方，量子力学的効果を考えると，

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} \epsilon(\omega)\, d\omega \\ &= \frac{3\hbar V}{4\pi^2 v^3}\left(\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} \omega^3 d\omega + \int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega\right) \\ &= \frac{3\hbar V}{4\pi^2 v^3}\left[\frac{1}{4}\omega_{\mathrm{D}}^4 + \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\hbar^4}\int_0^{\beta\hbar\omega_{\mathrm{D}}} \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} d\xi\right] \end{aligned} \tag{A-6}$$

となる．第一項は零点振動の寄与で，これは明らかに温度に依存しない．温度依存性は第二項にのみ現れる．低温では $T \to 0 (\beta \to \infty)$ とすれば，第二項の積分は温度に依存しない定数となり，$E \propto T^4$ となるから，低温では

$$C \propto T^3 \tag{A-7}$$

となる．

問題 4　採点基準 (配点：20 点)

- 各設問の結果が正しい．(**各 4 点**) ここで，(4) については，古典論について正しく書かれていて **4 点**，量子論について正しく書かれていて **4 点**．ただし，理由を明記しておらず，答えのみ記してあるものは**各 1 点減点**．具体的には以下を参照のこと．ただし，(1) については答えのみでもよい．

部分点は以下の通り．

- (2) について，答えのみ記述．(**1 点減点**)
- (2) について，3 を乗じ忘れた，もしくは別の数を乗じている．(**2 点減点**)
- (3) について，$\mathcal{D}(\omega)\, d\omega$ の表式で終わらせている．(**1 点**)
- (3) について，係数は間違っているが問題 3 の結果を踏まえて書かれている． (**2 点**)
- (3) について，古典論もしくは量子論のエネルギー密度が書かれていない．(**1 点減点**)
- (4) の古典論について，比熱が定数であることが明記されている．(**2 点**)
- (4) について，理由が明記されていない．(**1 点減点**)