統計力学 解答(2004/06/22)

最終更新：2005/07/21(Thu)
田中 宗*

解答 1 (分布関数)

(a) フェルミ粒子の大分配関数は,

$$\Xi^{(\mathrm{F})} = 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$$

となる．これより，フェルミ分布関数は,

$$\begin{aligned} f^{(\mathrm{F})}(\epsilon) &= \langle N \rangle = k_{\mathrm{B}} T \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi^{(\mathrm{F})} = \frac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} \end{aligned}$$

となる．また，ボース粒子の大分配関数は,

$$\Xi^{(\mathrm{B})} = 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + e^{-2\beta(\epsilon-\mu)} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$$

であるから，ボース分布関数は,

$$\begin{aligned} f^{(\mathrm{B})}(\epsilon) &= \langle N \rangle = k_{\mathrm{B}} T \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi^{(\mathrm{B})} \\ &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} \end{aligned}$$

となる．

(b) 複号は上からフェルミ，ボースの順であるとする．希薄であるとは,

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} \ll 1$$

であるから，これはつまり,

$$e^{\beta(\epsilon-\mu)} \gg 1$$

と等価．故に,

$$f(\epsilon) \to e^{-\beta(\epsilon-\mu)} = f^{(\mathrm{C})}(\epsilon)$$

となる．このとき，１つの自由粒子の分配関数を Z_1 とすれば,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\mathrm{state}} f^{(\mathrm{C})}(\epsilon) = e^{\beta\mu} \sum_{\mathrm{state}} e^{-\beta\epsilon} \\ &= e^{\beta\mu} Z_1 \end{aligned}$$

となる．前回の問より,

$$Z_1 = \left(\frac{m k_{\mathrm{B}} T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} V = n_{\mathrm{Q}} V$$

だから,

$$N = e^{\beta\mu} n_{\mathrm{Q}} V$$

*居室：理学部１号館 938 号室　　shu-t@spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp
統計力学演習の問題は次の WEB ページに掲載します。
http://spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp/ ~shu-t/enshu/enshu.html

となる．これを変形して，

$$\mu = k_{\mathrm{B}} T \log \frac{n}{n_{\mathrm{Q}}}$$

となる．これは理想気体の化学ポテンシャルと一致する．また，

$$e^{\beta(\epsilon - \mu)} \gg 1$$

の意味を考えよう．この式を変形して，

$$\begin{aligned} e^{\beta\epsilon} e^{-\log \frac{n}{n_{\mathrm{Q}}}} &\gg 1 \\ e^{\beta\epsilon} \frac{n_{\mathrm{Q}}}{n} &\gg 1 \end{aligned}$$

より，$n \ll n_{\mathrm{Q}}$ となる．$n_{\mathrm{Q}} \propto T^{\frac{3}{2}}$ より，これは高温を表していることが分かる．すなわち，希薄極限とは**古典極限**である．

comment

古典極限では粒子の統計性に起因する項が消えていることに着目せよ．また，粒子の統計性に関するノートを作成する予定である．

解答 2 (フェルミ粒子)

(a)

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{e^x+1}=-\frac{1}{\left(e^x+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}$$

より，

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{x^p}{\left(e^x+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}dx \\
= & \int_0^\infty x^p\left(-\frac{d}{dx}\frac{1}{e^x+1}\right)dx \\
= & \left[\frac{-x^p}{e^x+1}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x+1}dx \\
= & 0+p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-1} \\
= & p\int_0^\infty x^{p-1}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}e^{-nx}dx \\
= & p\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \\
= & \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}p\Gamma(p) \\
= & \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}-2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n)^p}\right)\Gamma(p+1) \\
= & \left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}\Gamma(p+1) \\
= & \left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p)\Gamma(p+1)
\end{aligned}$$

で示された．ただし，途中で，$nx=t$ と変数変換した．

(b) $g(\epsilon)=\frac{d\phi}{d\epsilon}$ とおく．ただし，$\phi(\epsilon)\,simeq0$ とする．また，$f(\epsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$ とすると，式 (Q-2) の左辺を I として，

$$I=\int_{\epsilon_0}^\infty f(\epsilon)\frac{d\phi}{d\epsilon}d\epsilon=-\int_{\epsilon_0}^\infty \phi(\epsilon)\frac{df}{d\epsilon}d\epsilon$$

ところで，$|\epsilon-\mu|\sim k_{\mathrm{B}}T$ 以外では，$\frac{df}{d\epsilon}\sim 0$ だから (これは (c) で明らかになる)，

$$\phi(\epsilon)\sim\phi(\mu)+(\epsilon-\mu)\left.\frac{d\phi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=\mu}+\frac{1}{2!}(\epsilon-\mu)^2\left.\frac{d^2\phi}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=\mu}+\cdots$$

と展開しておく．また，$\epsilon_0\to-\infty$ とする．ところで，

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{df}{d\epsilon}d\epsilon=1$$

また，n が奇数のとき，

$$\int_{-\infty}^\infty (\epsilon-\mu)^n\frac{df}{d\epsilon}d\epsilon=0$$

n が偶数のとき，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}(\epsilon-\mu)^n\frac{df}{d\epsilon}d\epsilon\\
=&\quad -\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\epsilon-\mu)^n}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)\left(e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)}d\epsilon\\
=&\quad -(k_{\mathrm{B}}T)^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx\\
=&\quad -2(k_{\mathrm{B}}T)^n\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\zeta(n)\Gamma(n+1)
\end{aligned}$$

故に，

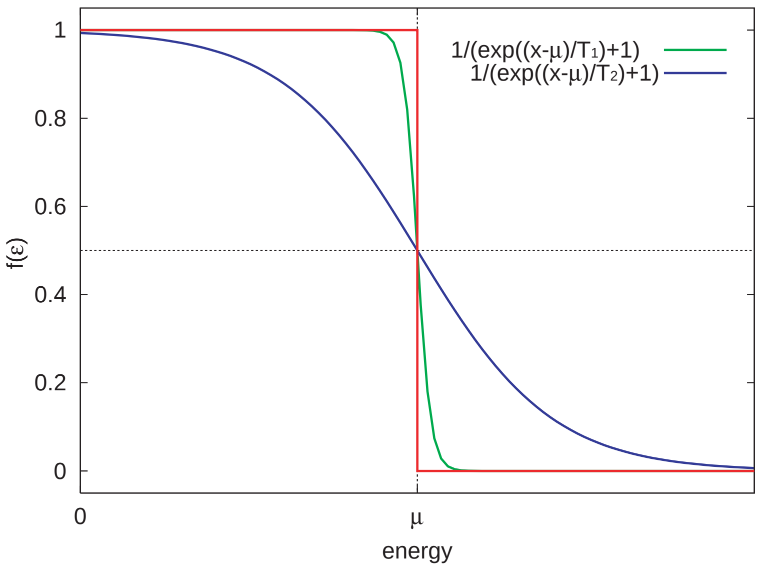
$$I=\phi(\mu)+\sum_{m=1}^{\infty}2(k_{\mathrm{B}}T)^{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\zeta(2m)\phi^{(2m)}(\mu)$$

よって，

$$\int_0^{\infty}\frac{g(\epsilon)\,d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}=\int_0^{\mu}g(\epsilon)\,d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}g'(\mu)(k_{\mathrm{B}}T)^2+\cdots$$

高次の項は I の表式より明らか．

(c) 赤線は $T=0$，緑線は T_1，青線は T_2 に対応する $(0<T_1<T_2)$．



温度が上がるにしたがって階段関数からずれてくる．

(d) フェルミエネルギー ϵ_{F} は，フェルミ運動量 p_{F} で $\epsilon_{\mathrm{F}}=\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}$ と書ける．また，$p=\hbar k$ より，運動量空間で見ると，1粒子量子状態は $2\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3$ の密度で分布している†．故に，$T\to 0$ では，一番低い準位から順に粒子が埋められていくから，

$$N=\frac{4\pi}{3}p_{\mathrm{F}}^3\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}$$

となる．故に，$n=\frac{N}{V}$ として，

$$p_{\mathrm{F}}=\hbar\left(3\pi^2n\right)^{\frac{1}{3}}$$

となる．また，フェルミエネルギーは，

$$\epsilon_{\mathrm{F}}=\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2n\right)^{\frac{2}{3}}$$

となる．

†スピンの自由度を考慮しているため，因子2がかかる．

(e) 低温で，フェルミ粒子はエネルギーの低い順に下から1個ずつ詰まる．この状態を**フェルミ縮退**という．

(f) ϵ 以下のエネルギーを持つ状態数 $N(\epsilon)$ は，

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

より，

$$N(\epsilon) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{3\pi^2}\epsilon^{\frac{3}{2}}$$

である．故に状態密度は，

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

故に，絶対零度での内部エネルギー $E_0^{(\mathrm{F})}$ は，

$$\begin{aligned}
E_0^{(\mathrm{F})} &= \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}}\mathcal{D}(\epsilon)\,\epsilon d\epsilon \\
&= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\epsilon_\mathrm{F}}\epsilon^{\frac{3}{2}}d\epsilon \\
&= \frac{2}{5}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon_\mathrm{F}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{3}{5}N\epsilon_\mathrm{F}
\end{aligned}$$

となる．また圧力は，$F = E - TS$ より，$T = 0$ では $E = F$ であることを利用して，

$$\begin{aligned}
p_0^{(\mathrm{F})} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T=0} = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) \\
&= \frac{2}{5}n\epsilon_\mathrm{F}
\end{aligned}$$

この結果は，$T = 0$ でも圧力があり，広がろうとすることを表している．また，これらの結果から，

$$p_0^{(\mathrm{F})}V = \frac{2}{3}E_0^{(\mathrm{F})}$$

なる関係式が導かれる．

(g) エネルギーの表式は，

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty f(\epsilon)\,\mathcal{D}(\epsilon)\,\epsilon d\epsilon \\
&= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}d\epsilon
\end{aligned}$$

また，かつて導出した，

$$pV = k_\mathrm{B}T\log\Xi$$

より，

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^\infty \frac{k_\mathrm{B}T}{V}\mathcal{D}(\epsilon)\log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right)d\epsilon \\
&= \frac{k_\mathrm{B}T}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}}\log\left[1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right]d\epsilon \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \frac{2}{3}\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}}d\epsilon
\end{aligned}$$

より，

$$pV=\frac{2}{3}E$$

となる．ボース分布についても同様の方針で示せる (証明略).

(h) $T\to 0$ では，

$$\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}}\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon=N$$

である．また，有限温度では，

$$\begin{aligned}N&=\int_0^{\infty}\mathcal{D}\left(\epsilon\right)f\left(\epsilon\right)d\epsilon\\&=\int_0^{\mu}\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\mathcal{D}'\left(\mu\right)+\cdots\end{aligned}$$

である．これらの式の差をとって，

$$\int_{\epsilon_{\mathrm{F}}}^{\mu}\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\mathcal{D}'\left(\mu\right)+\cdots=0$$

となる．十分低温では，$\mu-\epsilon_{\mathrm{F}}\ll\epsilon_{\mathrm{F}},\mu$ より，

$$\left(\mu-\epsilon_{\mathrm{F}}\right)\mathcal{D}\left(\epsilon_{\mathrm{F}}\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\mathcal{D}'\left(\epsilon_{\mathrm{F}}\right)=0$$

これを変形して，

$$\mu=\epsilon_{\mathrm{F}}-\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial\epsilon}\log\mathcal{D}\left(\epsilon\right)\right]_{\epsilon=\epsilon_{\mathrm{F}}}$$

一方で，

$$\begin{aligned}E&=\int_0^{\infty}\epsilon f\left(\epsilon\right)\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon\\&=\int_0^{\mu}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\left[\frac{d}{d\epsilon}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)\right]_{\epsilon=\mu}+\cdots\\&\simeq\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon+\left(\mu-\epsilon_{\mathcal{F}}\right)\epsilon_{\mathrm{F}}\mathcal{D}\left(\epsilon_{\mathcal{F}}\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathcal{B}}T\right)^2\left[\frac{d}{d\epsilon}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)\right]_{\epsilon=\mu}\\&\simeq\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon-\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\epsilon_{\mathrm{F}}\mathcal{D}'\left(\epsilon_{\mathrm{F}}\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\left[\frac{d}{d\epsilon}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)\right]_{\epsilon=\mu}\\&=\int_0^{\epsilon_{\mathcal{F}}}\epsilon\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2\mathcal{D}\left(\epsilon_{\mathrm{F}}\right)\end{aligned}$$

故に，比熱は，

$$C=\frac{\pi^2}{3}k_{\mathrm{B}}^2T\mathcal{D}\left(\epsilon_{\mathrm{F}}\right)$$

となる．

(i) 相対論的フェルミ気体のフェルミ運動量は，$p_{\mathrm{F}}=2\pi\hbar\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ である．よって，フェルミエネルギーは，$\epsilon_{\mathrm{F}}=cp_{\mathrm{F}}=2\pi\hbar c\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ である．これより，

$$n=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{2\pi\hbar c}\right)^3$$

となる．故に，状態密度は，

$$\mathcal{D}\left(\epsilon\right)=\frac{8\pi V\epsilon^2}{\left(2\pi\hbar c\right)^3}$$

となる．絶対零度でのエネルギーは，

$$
\begin{aligned}
E_0^{(F)} &= \int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathcal{D}\left(\epsilon\right) \epsilon d\epsilon \\
&= \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{1}{4} \epsilon_{\mathrm{F}}^4 \\
&= \frac{3}{2} \pi N \hbar c \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

となる．また，圧力は，

$$
\begin{aligned}
p_0^{(F)} &= \frac{3}{2} N \pi \hbar c \left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} V^{-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{1}{3} E_0^{(F)} \frac{1}{V}
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
p_0^{(F)} V = \frac{1}{3} E_0^{(F)}
$$

である．

解答 3 (ボース粒子)

(a) ボース分布は,

$$f^{(\mathrm{B})}(\epsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$$

である．$\epsilon=0$ の占有率は,

$$f^{(\mathrm{B})}(0)=\frac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$$

である．これが正でなければならないから，$\mu<0$ となる．また，絶対零度では $f(0)$ が大きくなるため，$-\beta\mu\sim 0$ だから,

$$N\simeq-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu}$$

故に,

$$\mu=-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{N}$$

となる．

(b) ボース・アインシュタイン凝縮が起こることから，$\mu=0$ となり，励起状態に在る粒子の数は,

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{e}}&=\int_0^\infty\frac{\mathcal{D}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon\\&=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\epsilon}d\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}\\&=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}dx\\&=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．ところで，$T=T_{\mathrm{C}}$ で $N=N_{\mathrm{e}}$ だから,

$$\begin{aligned}N&=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}})^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\\T_{\mathrm{C}}&=\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}}\left(\frac{N}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)V}\right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

となる．

(c) (b) より,

$$N_{\mathrm{e}}=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

である．また,

$$N=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}})^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

より,

$$N_{\mathrm{e}}=N\left(\frac{T}{T_{\mathrm{C}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

また，

$$N_0 = N - N_{\mathrm{e}} = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_{\mathrm{C}}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

別の見方をしてみよう．

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}d\epsilon \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\alpha}-1}dx \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}} I(\alpha) \end{aligned}$$

ただし，$\alpha = \beta\mu$ とおいた．また，$I(\alpha)$ は $\alpha < 0$ で定義された α の増加関数だから，$I(\alpha)$ の最大値は，$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$ である．ただし，

$$I(\alpha) = \frac{N}{V}\frac{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}{(mk_{\mathrm{B}}T)^{\frac{3}{2}}} > I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

なる低温では α は存在しない．故に，$\epsilon = 0$ に在る粒子数を N_0 として，

$$N = \frac{Vm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}d\epsilon + N_0$$

と書ける．

(d)

$$\begin{aligned} E^{(B)} &= \int_0^\infty \frac{\epsilon\mathcal{D}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon}-1}d\epsilon \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{5}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x-1}dx \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}V}{16\pi^2}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(k_{\mathrm{B}}T)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

である．これより比熱は，

$$\begin{aligned} C^{(B)} &= \frac{15}{32}\frac{\sqrt{\pi}V}{\pi^2}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}k_{\mathrm{B}}^{\frac{5}{2}}T^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{15}{4}\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}Nk_{\mathrm{B}}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{C}}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(e) １次元の場合

長さ L の区間を考える．波数空間で見た場合，状態は $\frac{L}{2\pi}$ 内に１個存在する．このとき，

$$\mathcal{D}(k)\,dk = \frac{L}{2\pi}dk$$

より，

$$\mathcal{D}(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{L}{2\pi}\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}d\epsilon$$

である．よって，

$$N = \frac{L\sqrt{2m}}{4\pi\hbar}\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1\right)} = \frac{L\sqrt{2m}}{4\pi\hbar}I^{(1)}(\beta\mu)$$

ところで，

$$\frac{N}{L}\frac{4\pi\hbar}{\sqrt{2m}} = I^{(1)}\left(\beta\mu\right)$$

は発散量だから，常に $\mu \neq 0$ なる解がある．故にボースアインシュタイン凝縮が起こらない．

２次元の場合

考える領域の面積を σ とする．このとき，

$$\mathcal{D}\left(k\right)dk = \frac{\sigma}{2\pi}kdk$$

であるから，

$$\mathcal{D}\left(\epsilon\right)d\epsilon = \frac{\sigma m}{2\pi\hbar^2}d\epsilon$$

となる．先と同様に，

$$N = \frac{\sigma m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} = \frac{\sigma m}{2\pi\hbar}I^{(2)}\left(\beta\mu\right)$$

ところで，

$$I^{(2)}\left(\beta\mu\right) = \frac{N}{\sigma}\frac{2\pi\hbar^2}{m}$$

この場合も，$I^{(2)}\left(0\right)$ は対数発散なので，常に $\mu \neq 0$ なる解が存在する．故にボースアインシュタイン凝縮は起こらない．

解答 4 省略.

解答 5 (分布関数の補足)

(a) フェルミ・ディラック分布は，１つの量子状態に粒子は１つしか入れないから，G_i の中から N_i を選ぶ方法は，

$$\frac{G_i!}{N_i!\,(G_i-N_i)!}$$

これを i についてかけて，

$$W^{(\mathrm{F})}=\prod_i \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i-N_i)!}$$

である．また，ボース・アインシュタイン分布は，グループ i の中の G_i 個の量子状態のそれぞれに重複を許して，N_i 個の粒子を入れる方法の数である．これは，

$$\frac{(N_i+G_i-1)!}{N_i!\,(G_i-1)!}$$

これを i についてかけると，

$$W^{(\mathrm{B})}=\prod_i \frac{(N_i+G_i-1)!}{N_i!\,(G_i-1)!}$$

となる．

(b) 粒子数，エネルギー一定の条件

$$\begin{cases}\sum_i N_i=N\\ \sum_i N_iE_i=E\end{cases}$$

のもと，W の最大化を考える．ラグランジュの未定定数 α,β を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial N_i}\left[\log W-\alpha\sum_i N_i-\beta\sum_i E_iN_i\right]=0$$

を満たさねばならない．いま $N_i,G_i\gg 1$ として，スターリングの公式を適用すれば，フェルミ分布に関しては，

$$\begin{aligned}\log W^{(\mathrm{F})} &= \sum_i\left[G_i\left(\log G_i-1\right)-N_i\left(\log N_i-1\right)-\left(G_i-N_i\right)\left(\log\left(G_i-N_i\right)-1\right)\right]\\ &= \sum_i\left[G_i\log G_i-N_i\log N_i-\left(G_i-N_i\right)\log\left(G_i-N_i\right)\right]\end{aligned}$$

となる．また，ボース分布に関しても，

$$\log W^{(\mathrm{B})} = \sum_i\left(N_i+G_i\right)\log\left(N_i+G_i\right)-N_i\log N_i-G_i\log G_i$$

以上をまとめれば (以降では複号は上から，フェルミ分布，ボース分布とする．)，

$$\log W=\sum_i\left[\pm G_i\log G_i-N_i\log N_i\mp\left(G_i\mp N_i\right)\log(G_i\mp N_i)\right]$$

となる．これより，満たすべき式を整理すると，

$$\frac{N_i}{G_i}=\frac{1}{e^{\alpha+\beta E_i}\pm 1}$$

ところで，エントロピーは，

$$\begin{aligned}S &= k_{\mathrm{B}}\log W\\ &= k_{\mathrm{B}}\sum_i\left[\pm G_i\log G_i-N_i\log N_i\mp\left(G_i\mp N_i\right)\log(G_i\mp N_i)\right]\end{aligned}$$

である．これをエネルギーについて微分すると，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V &= k_{\mathrm{B}}\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial E}\frac{\partial}{\partial N_i}\left[\pm G_i\log G_i \mp (G_i \mp N_i)\log(G_i \mp N_i) - N_i\log N_i\right] \\
&= k_{\mathrm{B}}\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial E}\left[-\log N_i + \log(G_i \mp N_i)\right] \\
&= k_{\mathrm{B}}\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial E}(\alpha + \beta E_i) \\
&= k_{\mathrm{B}}\frac{\partial}{\partial E}\left[\alpha\sum_i N_i + \beta\sum_i E_i N_i\right] \\
&= k_{\mathrm{B}}\frac{\partial}{\partial E}(\alpha N + \beta E) \\
&= k_{\mathrm{B}}\beta
\end{aligned}$$

ところで，$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$ より，$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ となる．
また，エントロピー S を粒子数 N で微分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial N} &= k_{\mathrm{B}}\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N_i}\left[\pm G_i\log G_i - N_i\log N_i \mp (G_i \mp N_i)\log(G_i \mp N_i)\right] \\
&= k_{\mathrm{B}}\frac{\partial}{\partial N}(\alpha N + \beta E) \\
&= k_{\mathrm{B}}\alpha
\end{aligned}$$

である．また，$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right) = -\frac{\mu}{T}$ であるから，$\alpha = -\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}$ である．

(c) 見分けのつく N 個の粒子を細胞 1,2,$\cdots$ に N_1,N_2,$\cdots$ 個ずつ配分する方法は，

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\cdots}$$

である．N_i 個の粒子を G_i 個に割り当てる方法は $G_i^{N_i}$ より，全体では $G_1^{N_1}G_2^{N_2}\cdots$ である．
故に，

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2!\cdots}G_1^{N_1}G_2^{N_2}\cdots$$

となる．N_i,G_i が大きいとして，

$$\begin{aligned}
\log W &= N\log N - \sum_i N_i\log\frac{N_i}{G_i} \\
&= \left(\sum_i N_i\right)\log\left(\sum_i N_i\right) - \sum_i N_i\log\frac{N_i}{G_i}
\end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\frac{N_i}{G_i} = Ne^{-\alpha-\beta E_i}$$

より，

$$N = Ne^{-\alpha}\sum_i G_i e^{-\beta E_i}$$

である．ここで，

$$Z = \sum_i G_i e^{-\beta E_i}$$

より，$e^{-\alpha} = \frac{1}{Z}$ である．故に，

$$\frac{N_i}{N} = \frac{1}{Z}G_i e^{-\beta E_i}$$

である．エントロピーを考えると，

$$\begin{aligned} S &= k_{\mathrm{B}}\left[N\log N - \sum_i N_i \log\frac{N_i}{G_i}\right] \\ &= k_{\mathrm{B}}N\alpha + k_{\mathrm{B}}\beta E \\ &= k_{\mathrm{B}}N\log Z + k_{\mathrm{B}}\beta E \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{\partial S}{\partial E} = K_{\mathrm{B}}\beta$$

故に，

$$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$$