統計力学 問題(2004/06/01)

最終更新：2005/07/21(Thu)
田中 宗*

レポート提出時：６月22日の統計力学演習のはじめ

黒板で説明したかどうかにかかわらず，全ての問題を解くこと．
ただし，**「以降は余力のある者のみチャレンジせよ．」**以降の問に関してはノルマとはしない．
また，最後にこの演習に関する感想を書いてください．
問題を解くにあたり，条件の不足があった場合はその旨レポートに記し，解答してください．

特に断りが無い限り，温度 T の**平衡状態**を扱っているとせよ．

問題 1 (ツェータ関数と積分公式) これらの式は以降の問題で使用するので，示しておこう．
$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ で定義される関数をツェータ関数という．

(a)

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x - 1} dx = \Gamma(p+1)\,\zeta(p+1) \tag{Q-1}$$

を示せ．

(b) $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ を示せ (ヒント：$f(x) = x^2$ を $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開せよ)．

問題 2 (調和振動子)N 個の独立な調和振動子がある．

(a) 古典統計力学の方法で，３次元の調和振動子 (質量 m) のヘルムホルツの自由エネルギー F，内部エネルギー E，比熱 C を求めよ．ただし，調和振動子のハミルトニアンは以下で与えられる．

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{\mathbf{p_i}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{x_i}^2}{2} \right] \tag{Q-2}$$

(b) １次元の調和振動子を量子力学的に取り扱おう．シュレディンガー方程式を解くことにより，エネルギー準位が $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ となることを利用して，ヘルムホルツの自由エネルギー F，内部エネルギー E，比熱 C を求めよ．

問題 3 (空洞放射) 温度 T に在る物体が電磁場とエネルギーを交換しながら，電磁場と物体がともに熱平衡状態にあるとする．電磁場の量子 (光子) １個のエネルギーは，c を光速，p を運動量，ω を角振動数とすると

$$E = p \cdot c = \hbar\omega \tag{Q-3}$$

である．いま，電磁場が一辺 L の立方体 (体積 V) の中に閉じ込められているとしよう．

(a) 相対論の教えによると，光子のエネルギーが $E = c \cdot p$ で与えられることを説明せよ．

(b) 真空中の電磁場は無限個の１次元調和振動子の集まりと等価であることを説明せよ．簡単のため，古典物理学的に (すなわち量子論を考慮せずに) 議論しても構わない．

(c) 角振動数 ω が $\omega = c \cdot k$ で与えられることを利用し，波数 $\mathbf{k}$ 空間内において，波数 $k \sim k + dk$ の球殻内の状態数 $\mathcal{D}(k)\,dk$ は，

$$\mathcal{D}(k)\,dk = \frac{Vk^2}{\pi^2} dk \tag{Q-4}$$

で与えられることを説明せよ．また，振動数 $\omega \sim \omega + d\omega$ に在る状態の数 $\mathcal{D}(\omega)\,d\omega$ の表式を求めよ．

*居室：理学部１号館 938 号室　　shu-t@spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp
統計力学演習の問題は次の WEB ページに掲載します。
http://spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp/ ~shu-t/enshu/enshu.html

(d) 上の結果を踏まえ，空洞放射の単位体積あたりのエネルギーを求めよ．ただし零点振動を無視せよ．

問題 4 (固体の比熱)Debye は，様々な振動数のフォノンから構成される固体模型を考えた．その理論を追いかけてみよう．

(a) $\omega \sim \omega + d\omega$ 内に在る状態数 $\mathcal{D}(\omega)\, d\omega$ が次で与えられることを説明せよ．このとき，空洞放射のときと何が異なるか，明確に述べよ．

$$\mathcal{D}(\omega)\, d\omega = \frac{3V}{2\pi^2 v^3}\omega^2 d\omega \tag{Q-5}$$

ただしいま考えている空間は一辺 L の立方体 (体積 V) である．また，v はフォノン速度の平均値を表す．

(b) 固体を構成する原子の個数を N として，デバイ振動数 ω_{D} を求めよ．

(c) デバイ振動数 ω_{D} を使って，固体のエネルギーを積分を含む形で表せ．また，デバイ温度 $\theta_{\mathrm{D}} = \frac{\hbar\omega_{\mathrm{D}}}{k_{\mathrm{B}}}$ と定義したとき，$T \ll \theta_{\mathrm{D}}$ なる低温領域，及び，$T \gg \theta_{\mathrm{D}}$ なる高温領域ではどうなるか.

(d) 上の議論を用いて，１次元固体，２次元固体において，エネルギーの温度依存性を求めよ．ただし，振動は固体を構成する原子が並ぶ方向のみにのみ生じるものとする．

問題 5 (化学ポテンシャル)

(a) 一辺の長さがド・ブローイ波長の熱平均値に等しい立方体の中に原子１個が存在する場合の濃度 n_{Q} を**量子濃度**と呼び、

$$n_{\mathrm{Q}} = \left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{Q-6}$$

で与えられる．これを説明せよ．また，n を粒子の密度 ($\frac{N}{V}$) とし，理想気体の化学ポテンシャルが,

$$\mu = k_{\mathrm{B}}T \log\left(\frac{n}{n_{\mathrm{Q}}}\right) \tag{Q-7}$$

と書けることを確かめよ．前回の演習で求めた理想気体のヘルムホルツ自由エネルギーの表式

$$F = -Nk_{\mathrm{B}}T\left[\frac{3}{2}\log\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right) + \log\frac{V}{N} + 1\right] \tag{Q-8}$$

を用いよ．

(b) 大気を平均質量 m の分子から成る理想気体と考えよう．このとき，地上からの高さ h の関数として，粒子の濃度 $n(h)$ を求めよ．ただし，地上での粒子濃度を $n(0)$ とせよ．

(c) 或る表面に N_0 個の吸着中心が在り，いま $N\,(< N_0)$ 個の気体分子が吸着されている．吸着分子間の相互作用を無視できるものとし，この分子の化学ポテンシャル μ を求めよ．

問題 6 (カルノーサイクル) 理想気体，光子気体のそれぞれについてカルノーサイクルにおける熱効率を T_{high},T_{low} を含む形で求めよ．ただし，高温を T_{high}，低温を T_{low} とし，他の物理量は各自で設定せよ．

以降は余力のある者のみチャレンジせよ．

Feynman Ratchet について論じよ．

(参考文献：Feynman Lectures on Physics Vol. 1 , Chapter 46. : Ratchet and Pawl)