統計力学 問題(2004/06/22)

最終更新：2005/07/21(Thu)
田中 宗*

レポート提出時：統計力学期末試験当日まで†

黒板で説明したかどうかにかかわらず，全ての問題を解くこと．
ただし，**「以降は余力のある者のみチャレンジせよ．」**以降の問に関してはノルマとはしない．
また，最後にこの演習に関する感想を書いてください．
問題を解くにあたり，条件の不足があった場合はその旨レポートに記し，解答してください．

特に断りが無い限り，温度 T の**平衡状態**を扱っているとせよ．

問題 1 (分布関数)

(a) ある量子状態に注目する．そこに粒子が 1 個あればエネルギーが ϵ となり，なければ 0 とする．この系で，フェルミ粒子の大分配関数 $\Xi^{(\mathrm{F})}$，分布関数 $f^{(\mathrm{F})}(\epsilon)$ を求めよ．また，ボース粒子に対しても，大分配関数 $\Xi^{(\mathrm{B})}$，分布関数 $f^{(\mathrm{B})}(\epsilon)$ を求めよ．

(b) 上で求めたそれぞれの分布関数について，希薄極限，すなわち $f(\epsilon) \ll 1$ のときの分布関数 $f^{(\mathrm{C})}(\epsilon)$ を求めよ．また，このとき，化学ポテンシャル $\mu^{(\mathrm{C})}$ を濃度 $n = \frac{N}{V}$ と量子濃度 n_{Q} を用いて書き下せ．更に，この結果は何を意味するか述べよ．

問題 2 (フェルミ粒子) スピン $\frac{1}{2}$ を持つ 3 次元空間上のフェルミ粒子について以下の問いに答えよ．

(a) 次の等式を証明せよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) p!\zeta(p) \tag{Q-1}$$

(b) T が小さいとして，次の等式が成立することを証明せよ．また，更に高次の項を一般的な形で書き下せ．

$$\int_0^\infty \frac{g(\epsilon)\,d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} = \int_0^\mu g(\epsilon)\,d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}g'(\mu)(k_{\mathrm{B}}T)^2 + \mathcal{O}\left((k_{\mathrm{B}}T)^4\right) \tag{Q-2}$$

(c) フェルミ・ディラック分布関数 $f^{(\mathrm{E})}(\epsilon)$ の ϵ に対するグラフを $T = 0, T_1, T_2$(ただし，$0 < T_1 < T_2$ とせよ) のときを定性的に描け．ただし，フェルミエネルギー ϵ_{F} がグラフ上のどこに当たるか明記せよ．

(d) フェルミ球の半径 p_{F}，フェルミエネルギー ϵ_{F} を濃度 n の関数として求めよ．

(e) 「縮退したフェルミ気体」という言葉の意味を説明せよ．

(f) 区間 $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$ に在る状態数を $\mathcal{D}(\epsilon)\,d\epsilon$ として，状態密度 $\mathcal{D}(\epsilon)$ を定義する．このとき，状態密度 $\mathcal{D}(\epsilon)$ を求めよ．またこれを使って，絶対零度でのエネルギー $E_0^{(\mathrm{F})}$ と圧力 $p_0^{(\mathrm{F})}$ を ϵ_{F} の関数として求めよ．また，$E_0^{(\mathrm{F})}$ と $p_0^{(\mathrm{F})}$ の関係式を記せ．特に圧力について，その物理的意味を述べよ．

---

*居室：理学部 1 号館 938 号室　　shu-t@spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp
統計力学演習の問題は次の WEB ページに掲載します。
http://spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp/ ~shu-t/enshu/enshu.html
†試験の監督の人の指示に従って提出してください．
ただし，統計力学の講義を受講していない者は，７月 27 日正午までに私の居室に来て，直接手渡しのこと．
また，レポートの採点は７月中に完了させるので，返却希望の受講者は，８月１日以降私の居室に取りにくること．
尚，６月 22 日に提出されたレポートに関しては，６月 27 日には採点を完了させるので，返却希望の者は，随時取りにくること．

(g) 上で求めた $E_0^{(\mathrm{F})}$ と $p_0^{(\mathrm{F})}$ の関係式は，一般に温度に依らずエネルギーと圧力に関する同様の式が成立する．そのことを示せ．また，これはボース粒子系でも成立する．これも示せ．

(h) (b) を用いて，低温極限でのエネルギーの表式を求め，比熱 C を $\mathcal{D}(\epsilon_{\mathrm{F}})$ を用いて表せ．

(i) 超相対論的フェルミ気体において，$E_0^{(\mathrm{F})}$ と $p_0^{(\mathrm{F})}$ の関係式を求めよ．

問題 3 (ボース粒子)

(a) N 個のボース粒子から成る 3 次元理想ボース気体の低温での化学ポテンシャルの振舞いを述べよ．また，絶対零度ではどうなるか．

(b) 励起状態に在るボース粒子の個数を N_{e} とする．このとき，ボースアインシュタイン凝縮状態の転移温度 T_{C} を求めよ．ただし，ツェータ関数はそのまま残しておいて構わない．

(c) 基底状態に在るボース粒子の個数 N_0 と N_{e} を T_{C} を用いて表せ．また,「ボース・アインシュタイン凝縮」とはどういうことか，これまでの結果を参考に説明せよ．

(d) ボース・アインシュタイン凝縮を起こした理想ボース気体のエネルギー $E^{(\mathrm{B})}$，比熱 $C^{(\mathrm{B})}$ を求めよ．

(e) １次元，２次元の理想ボース気体ではボース・アインシュタイン凝縮が起こらないことを示せ．

問題 4 (最後の演習なので……) これまで全部で４回の演習のレポート作成に使用した (参考にした) 参考書，問題集，もしくは Web 上で公開されている講義ノートなどを全て挙げてください．また，差し支えがなければ，本に関しては自分で持っているか，図書館で借りたか，も明記して頂けるとありがたいです．

以降は余力のある者のみチャレンジせよ．

問題 5 (分布関数の補足) 問題１で求めた分布関数を別の方法で求めよう．エネルギーのあまり違わない多くの量子状態を束ね，それを１つの細胞で表し，たくさんの細胞 1,2,$\cdots$ を考える．各細胞内の量子状態のエネルギーを E_1,E_2,$\cdots$ とし，各細胞内に含まれる量子状態の数を G_1,G_2,$\cdots$ とする．これらの細胞に粒子がそれぞれ N_1,N_2,$\cdots$ ずつ分布している場合の微視状態の数 W を求めるという方針で行こう．

(a) フェルミ・ディラック分布，ボース・アインシュタイン分布のそれぞれについて，微視状態の数 $W^{(\mathrm{F})}$,$W^{(\mathrm{B})}$ を求めよ．

(b) (a) の数を最大にする分布の式を導け．なおこの際，ラグランジュの未定定数を導入したなら，その未定定数を別の関係を使って決定しておくこと．

(c) 同様の方針で，マクスウェル・ボルツマンの分布を導け．